

Aufgabe 1: Navier-Stokes-Gleichung

Wasser strömt stationär in einem ebenen Kanal (siehe Abb. 1) mit der Höhe $2h$ und der Breite B . Die Kanalwände bewegen sich mit einer konstanten Geschwindigkeit U_0 in der positiven x -Richtung. In der Kanalmitte befindet sich eine unendlich dünne Platte. Entlang dieser Platte stellt sich ein linearer Geschwindigkeitsverlauf $u(y)$ ein. Am Ende dieser Platte (Punkt A) kommt es zu einer Vermischung der beiden Wasserströme. Ab dem Punkt B hat sich wieder ein Geschwindigkeitsprofil $u = u(y)$ ausgebildet, das sich in x -Richtung nicht mehr ändert.

Die Kanalbreite B kann als breit angenommen werden, so dass Randeﬀekte vernachlässigt werden können.

Tipp: Die Schwerkraft g hat keinen Einfluss!

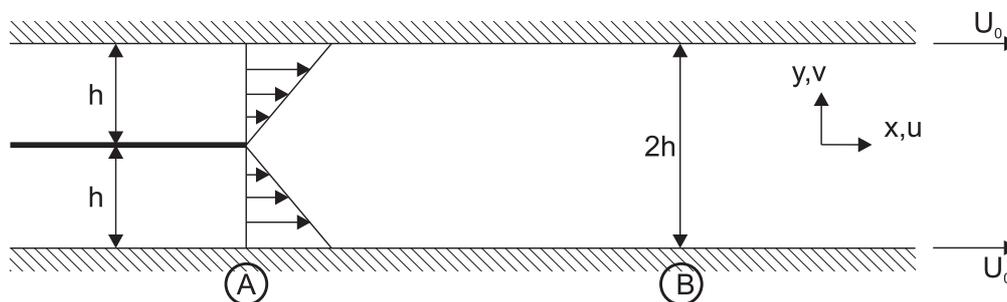


Abbildung 1

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Kontinuitäts- und Navier-Stokes-Gleichung, dass sich der Druckgradient $\partial p/\partial x$ ab dem Punkt B nicht mehr ändert.
2. Wie groß ist der Durchfluss im gesamten Kanal?
3. Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil $u = u(y)$ ab dem Punkt B und zeichnen Sie diese in Abb. 1 ein. (An den Rändern gilt die Haftbedingung)

(Lösung: (b) $Q = U_0 B h$, (c) $\frac{u(y)}{U_0} = 1 - \frac{3}{4}[1 - (\frac{y}{h})^2]$)

Aufgabe 2: Energiegleichförmigkeitskoeffizient – Arbeits - Energie Gleichung

1. Gegeben ist die laminare Strömung zwischen zwei Platten mit folgender Geschwindigkeitsverteilung:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u(z) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{mit} \quad u(z) = u_{max} \cdot \left(1 - \left(\frac{z}{H/2}\right)^2\right) \quad ; \quad \text{für} \quad -\frac{H}{2} \leq z \leq \frac{H}{2}$$

- a) Bestimmen Sie den Energiegleichförmigkeitsfaktor α , mit

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A (u(z)/\bar{u})^3 dA \quad .$$

- b) Was beschreibt der Energiegleichförmigkeitsfaktor und wofür wird er verwendet?

(Lösung: $\alpha = 1,54$)

2. Gegeben sei die Arbeits-Energie Gleichung wie in der Vorlesung dargestellt.
- Diskutieren Sie die einzelnen Terme und ihre Bedeutung.
 - Leiten Sie ausgehend von der Arbeits-Energie Gleichung die Bernoulli-Gleichung her mit Begründung der einzelnen Schritte. Welche Annahmen treffen Sie?
 - Welche Vereinfachungen werden insbesondere bezüglich der Geschwindigkeitsverteilungen der durchströmten Flächen getroffen und wie ist dies zu begründen?

Aufgabe 3: Energiegleichung – Anwendungen

1. Eine horizontale Rohrleitung befördert Wasser von einem Wasserspeicher (Abb. 2). Das Wasser tritt bei Länge $L = 2,00$ km in Form eines Freistrahles aus. Der Rohrdurchmesser sei $D = 0,200$ m
- Zeichnen Sie unter Vernachlässigung aller Verluste die Druck- und Energielinie maßstäblich in Abb. 2 mit Werten ein.
 - Wie groß ist der Durchfluss Q unter Vernachlässigung der Energieverluste?
 - Wie groß ist der Durchfluss Q unter der Annahme einer laminaren Rohrströmung und der Vernachlässigung von Energieverlusten? Ist diese Annahme gerechtfertigt?
 - Wie groß ist der Durchfluss Q unter der Annahme einer turbulenten Rohrströmung unter Vernachlässigung von Energieverlusten?
 - Wie groß ist der Durchfluss wenn die Energieverlusthöhe gegeben ist durch

$$h_V = \frac{2,00 \cdot 10^{-2} \cdot (L/D)V^2}{2g} \quad ;$$

mit L Länge der Rohrleitung, D Durchmesser des Rohres und V Durchschnittsgeschwindigkeit im Rohr ?

- Zeichnen sie für den Fall mit Reibungsverluste den Verlauf der Druck- und Energielinie.

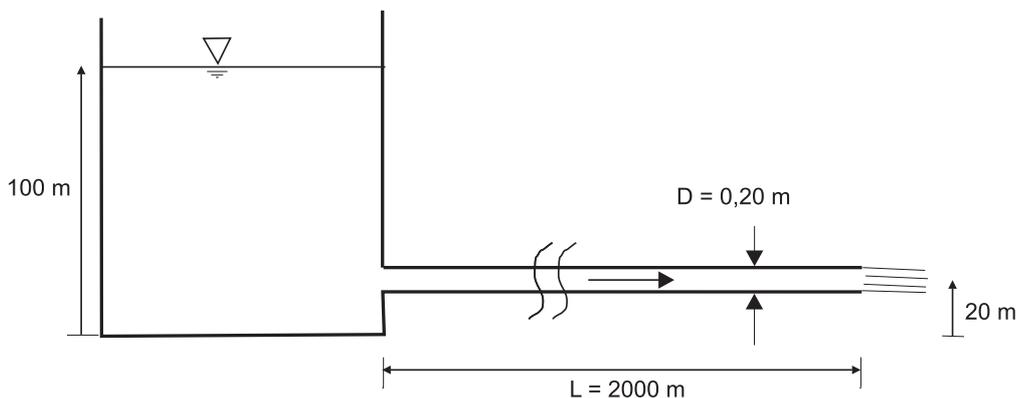


Abbildung 2

(Lösungen: (b) $Q = 1,244 \text{ m}^3/\text{s}$; (c) $Q = 0,898 \text{ m}^3/\text{s}$;
 (d) $Q = 1,216 \text{ m}^3/\text{s}$; (e) $Q = 0,0877 \text{ m}^3/\text{s}$)

2. Aus einem großen Behälter fließt Wasser durch eine Rohrleitung aus (Abb. 3).
- Zeichnen Sie die Energielinie und die Drucklinie in Abb. 3 ein, sowie in einer separaten Skizze entlang der Rohrachse.
 - Bestimmen Sie den Durchfluss im Rohr sowie den Druck im Punkt B . Vernachlässigen Sie Energieverluste.

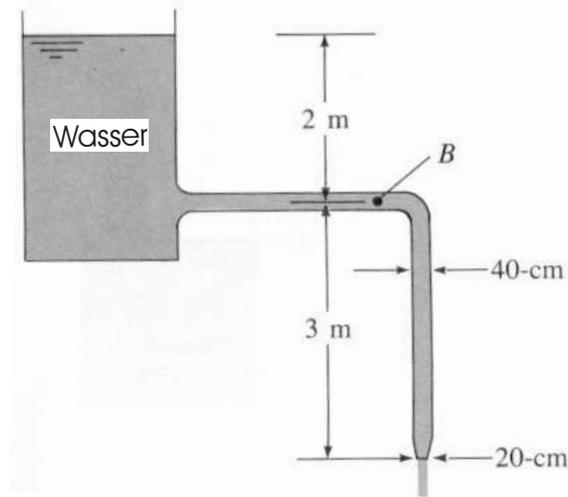


Abbildung 3 (Lösung: $Q = 0,311 \text{ m}^3/\text{s}$; $p_B/\gamma = 1,69 \text{ m}$)

3. In Abb. 4 ist eine Kleinwasserkraftanlage skizziert. Der Höhenunterschied zwischen der Wasseroberfläche im Speicherbecken und der Wasseroberfläche im Fluss unterhalb des Speicherbeckens, beträgt $H = 10,00 \text{ m}$. Die Geschwindigkeit des in den Fluss ausströmenden Wassers beträgt $5,00 \text{ m/s}$ und der Durchfluss durch das System ist $1,000 \text{ m}^3/\text{s}$. Energieverluste sind bis auf die Energiedissipation bei Eintritt ins Unterwasser vernachlässigbar. Zeichnen Sie die Energie- und Drucklinie mit Maßangaben in Abb. 4 ein und ermitteln Sie die Leistung der Turbine in Kilowatt.

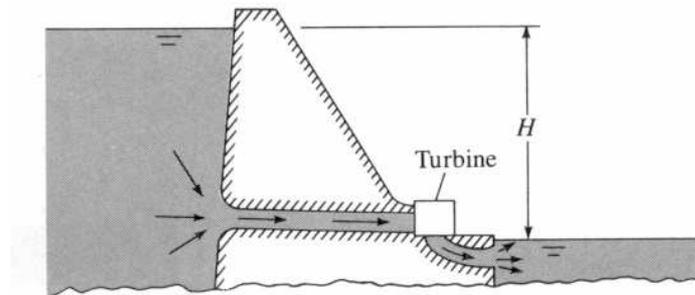


Abbildung 4

(Lösung: $P = 85,6 \text{ kW}$)

4. Wasser fließt aus einem großen Tank durch ein Rohrleitungssystem und endet in einem Freistrahlsystem (Abb. 5). Der Durchfluss beträgt $Q = 0,1000 \text{ m}^3/\text{s}$. Reibungseinflüsse können vernachlässigt werden.
- Stellt die Maschine eine Pumpe oder eine Turbine dar?
 - Wie groß ist der Druck in A und B?
 - An welcher Stelle besteht die Gefahr von Kavitation?

Gegeben:

$d = 0,150 \text{ m}$, $D = 0,300 \text{ m}$, $\Delta z_1 = 1,22 \text{ m}$, $\Delta z_2 = 3,66 \text{ m}$.

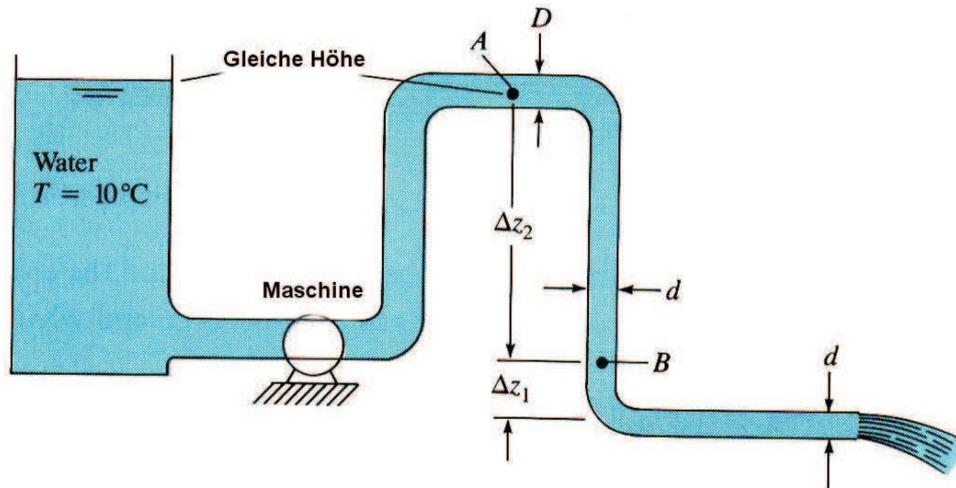


Abbildung 5

(Lösungen: (a) Turbine ; (b) $p_A = -3,28 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, $p_B = -1,19 \cdot 10^4 \text{ Pa}$)